# DESCENTE PAR ÉCLATEMENTS EN $K$-THÉORIE INVARIANTE PAR HOMOTOPIE

*par*

Denis-Charles Cisinski

***Résumé.*** — Ces notes donnent une preuve de la représentabilité de la $K$-théorie invariante par homotopie dans la catégorie homotopique stable des schémas (résultat annoncé par Voevodsky). On en déduit, grâce au théorème de changement de base propre en théorie de l'homotopie stable des schémas, un théorème de descente par éclatements en $K$-théorie invariante par homotopie.

***Abstract.*** — These notes give a proof of the representability of homotopy invariant $K$-theory in the stable homotopy category of schemes (which was announced by Voevodsky). One deduces from the proper base change theorem in stable homotopy theory of schemes a descent by blow-ups theorem for homotopy invariant $K$-theory.

## Introduction

La descente par éclatements pour la $K$-théorie invariante par homotopie a été prouvée par C. Haesemeyer [**7**] pour les schémas de caractéristique nulle. Il s'agit de l'un des ingrédients de la preuve de la conjecture de Weibel [**23**, Question 2.9], d'annulation de la $K$-théorie négative au delà de la dimension de Krull, pour les schémas de caractéristique nulle ; voir [**4**].

Nous prouvons ici la descente par éclatements pour la $K$-théorie invariante par homotopie pour les schémas noethériens de dimension de Krull finie (sans aucune restriction sur la caractéristique). L'argument invoqué ici n'utilise pas de résolution des singularités, mais consiste à démontrer un résultat intéressant en soit, annoncé par V. Voevodsky [**20**, Théorème 6.9] : la représentabilité de la $K$-théorie invariante par homotopie dans la catégorie homotopique stable des schémas de Morel et Voevodsky par le $S^1 \wedge \mathbf{G}_m$-spectre $KGL$. La descente par éclatements en $K$-théorie invariante par homotopie est alors un simple corollaire des théorèmes de changement de base lisse et de changement de base propre dans le cadre motivique, démontrés par J. Ayoub [**1**], et légèrement généralisés dans [**3**].

Pour terminer ces notes, en utilisant le fait que la $K$-théorie non-connective est invariante par homotopie modulo la $p$-torsion pour les schémas de caractéristique $p > 0$, on en déduit, sous l'hypothèse de l'existence d'une résolution des singularités *locale* pour les $k$-schémas de type fini, la conjecture de Weibel en caractéristique positive modulo $p$-torsion (d'après T. Geisser & L. Hesselholt [**5**], ainsi que A. Krishna [**11**], on peut aussi avoir des résultats à coefficients entiers, mais sous l'hypothèse de l'existence d'une résolution des singularités *globale*). Signalons que, depuis la rédaction de la première version de ces notes, la conjecture de Weibel en caractéristique $p > 0$ modulo $p$-torsion a été démontrée inconditionnellement par Shane Kelly [**10**], en utilisant les résultats de représentabilité et de descente prouvés ici, ainsi que les raffinements apportés par O. Gabber à la théorie des altérations de de Jong.

Dans ce qui suit, tous les schémas seront noethériens, de dimension de Krull finie.

## 1. Spectres invariants par homotopie

***1.1.*** — Si $E$ est un $S^1$-spectre, on notera $\pi_n(E)$ son $n$-ème groupe d'homotopie stable. Lorsque nous aurons envie d'insister sur le point de vue cohomologique, nous écrirons

$$H^n(E) = \pi_{-n}(E)\,.$$

***1.2.*** — Soit $S$ un schéma. On considère la catégorie $\mathcal{E}(S)$ des préfaisceaux simpliciaux sur la catégorie des $S$-schéma lisses, munie de la structure de catégorie de modèles projective (voir par exemple [**2**, Proposition 4.4.16]). On désigne par $\mathcal{E}_\bullet(S)$ sa variante pointée. On note $Sp_{S^1}(S)$ la catégorie de modèles stable des $S^1$-spectres (symétriques) dans $\mathcal{E}_\bullet(S)$ (ou encore, de manière équivalente, la catégorie de modèles projective des préfaisceaux en $S^1$-spectres (symétriques) sur la catégorie des $S$-schémas lisses). La catégorie homotopique correspondante $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ est canoniquement munie d'une structure de catégorie triangulée engendrée par ses objets compacts. Une famille génératrice est donnée par la collection des (suspensions des) objets de la forme $\Sigma^\infty(X_+)$, où $X$ parcourt la classe des $S$-schémas lisses. Si $E$ est un $S^1$-spectre dans $\mathcal{E}_\bullet(S)$, on note, pour tout entier $n$ et pour tout $S$-schéma lisse $X$,

$$H^n(E(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))}(\Sigma^\infty(X_+), \Sigma^n E)$$

le $n$-ème groupe de cohomologie de $X$ à coefficients dans $E$. Un morphisme $E \longrightarrow F$ de $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ est un isomorphisme si et seulement si, pour tout $S$-schéma lisse $X$, et pour tout entier $n$, il induit un isomorphisme de groupes abéliens $H^n(E(X)) \simeq H^n(F(X))$.

On dispose aussi de la sphère de Tate $S^1 \wedge \mathbf{G}_m$ (où le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ est considéré ici comme un préfaisceau pointé par 1). On notera $T$ tout remplacement cofibrant de $S^1 \wedge \mathbf{G}_m$ dans $\mathcal{E}_\bullet(S)$ de sorte que $T \simeq S^1 \wedge \mathbf{G}_m$ dans $\mathrm{Ho}(\mathcal{E}_\bullet(S))$.

***1.3.*** — Un préfaisceau en $S^1$-spectres $E$ est dit *invariant par homotopie* si, pour tout $S$-schéma lisse $X$, et pour tout entier $n$, la projection $X \times \mathbf{A}^1 \longrightarrow X$ induit un isomorphisme

$$H^n(E(X)) \simeq H^n(E(X \times \mathbf{A}^1))\,.$$

On note $\mathrm{Ho}_{\mathbf{A}^1}(Sp_{S^1}(S))$ la sous-catégorie pleine des $S^1$-spectres invariants par homotopie. Cette dernière catégorie peut être décrite comme une localisation de la catégorie triangulée $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ comme suit. Désignons par $\mathcal{A}$ la sous-catégorie localisante (i.e. stables par petites sommes quelconques, par suspensions et cosuspensions, ainsi que par extensions) de $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ engendrée par les cônes des morphismes $\Sigma^\infty(X \times \mathbf{A}^1_+) \longrightarrow \Sigma^\infty(X_+)$ (induits par les projections $X \times \mathbf{A}^1 \longrightarrow X$). Alors le foncteur vers le quotient de Verdier correspondant

$$\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S)) \longrightarrow \mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))/\mathcal{A}$$

admet un adjoint à droite pleinement fidèle dont l'image essentielle est précisément la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ formée des $S^1$-spectres invariants par homotopie. On peut calculer l'adjoint à gauche du foncteur d'inclusion

$$i : \mathrm{Ho}_{\mathbf{A}^1}(Sp_{S^1}(S)) \longrightarrow \mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$$

de la manière suivante. On rappelle que l'on dispose d'un $S$-schéma cosimplicial $\Delta^\bullet_S$ défini par

$$\Delta^n_S = S \times \mathrm{Spec}\left(\mathbf{Z}[t_0, \ldots, t_n]/(t_0 + \cdots + t_n - 1)\right),$$

et qu'on a des isomorphismes (non canoniques) $\Delta^n_S \simeq \mathbf{A}^n_S$. Si $E$ est un préfaisceau de $S^1$-spectres sur la catégorie des $S$-schémas lisses, on note $R_{\mathbf{A}^1}(E)$ le $S^1$-spectre défini par la formule

$$R_{\mathbf{A}^1}(E) = \mathbf{L}\varinjlim_{\Delta^n \in \Delta^{op}} \mathbf{R}\mathit{Hom}(\Sigma^\infty(\Delta^n_{S+}), E)$$

où $\mathbf{R}\mathit{Hom}$ désigne le hom interne de la catégorie $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$, et où la colimite homotopique est indexée par la catégorie opposée de la catégorie des simplexes). On vérifie immédiatement que $R_{\mathbf{A}^1}(E)$ est invariant par homotopie, et que le foncteur $R_{\mathbf{A}^1}$ est l'adjoint à gauche du foncteur d'inclusion ci-dessus. Autrement dit, le morphisme canonique

$$E \longrightarrow R_{\mathbf{A}^1}(E)$$

est le morphisme universel de $E$ vers un préfaisceau de $S^1$-spectres invariant par homotopie.

On dira qu'un morphisme de $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ est une $\mathbf{A}^1$-*équivalence* si son image par le foncteur $R_{\mathbf{A}^1}$ est un isomorphisme. On peut donc décrire la catégorie $\mathrm{Ho}_{\mathbf{A}^1}(Sp_{S^1}(S))$ comme la localisation de la catégorie $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ par la classe des $\mathbf{A}^1$-équivalences (le foncteur $R_{\mathbf{A}^1}$ étant alors le foncteur de localisation canonique).

***Lemme 1.4.*** — *Soit $C$ un objet compact de* $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$. *Le foncteur*

$$\mathbf{R}\mathit{Hom}(C, -) : \mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S)) \longrightarrow \mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$$

*respecte les $\mathbf{A}^1$-équivalences. En particulier, pour tout préfaisceau de $S^1$-spectres $E$, on a un isomorphisme canonique*

$$R_{\mathbf{A}^1}(\mathbf{R}\mathit{Hom}(C, E)) \simeq \mathbf{R}\mathit{Hom}(C, R_{\mathbf{A}^1}(E)).$$

*Démonstration.* — Pour un $S$-schéma lisse $X$ et un préfaisceau de $S^1$-spectres $E$, on notera

$$E^X = \mathbf{R}\mathit{Hom}(\Sigma^\infty(X_+), E).$$

Pour tout préfaisceau de $S^1$-spectres $E$, la projection $\mathbf{A}^1_S \longrightarrow S$ induit une $\mathbf{A}^1$-équivalence

$$E \longrightarrow E^{\mathbf{A}^1_S}.$$

En effet, le morphisme de multiplication $\mu : \mathbf{A}^1_S \times_S \mathbf{A}^1_S \longrightarrow \mathbf{A}^1_S$ induit un morphisme

$$E^{\mathbf{A}^1_S} \longrightarrow E^{\mathbf{A}^1_S \times_S \mathbf{A}^1_S} = (E^{\mathbf{A}^1_S})^{\mathbf{A}^1_S}\,,$$

d'où un morphisme

$$h : \Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S\,+}) \wedge^{\mathbf{L}} E^{\mathbf{A}^1_S} \longrightarrow E^{\mathbf{A}^1_S}\,,$$

lequel est une $\mathbf{A}^1$-homotopie de l'identité de $E^{\mathbf{A}^1}$ avec le morphisme composé

$$E^{\mathbf{A}^1_S} \longrightarrow E \longrightarrow E^{\mathbf{A}^1_S}\,.$$

Désignons par $\mathcal{A}'$ la sous-catégorie localisante de $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ engendrée par les cônes de morphismes de la forme $C \longrightarrow C^{\mathbf{A}^1}$, pour $C$ un objet compact. La remarque précédente montre que $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ (où $\mathcal{A}$ est la sous-catégorie localisante introduite au numéro 1.3). On a en fait l'égalité $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. En effet, le morphisme de multiplication

$$\Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S\,+}) \wedge \Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S\,+}) \longrightarrow \Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S\,+})$$

induit, pour tout $S$-schéma lisse $X$, un morphisme

$$\Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{X\,+}) \longrightarrow \Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{X\,+})^{\mathbf{A}^1_S}\,,$$

lequel est une $\mathbf{A}^1$-homotopie (en termes d'espace des chemins) de l'identité de $\Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{X\,+})$ avec le morphisme composé

$$\Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{X\,+}) \longrightarrow \Sigma^\infty(X_+) \longrightarrow \Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{X\,+})\,.$$

Le même type de considérations montre plus généralement que, pour tout entier $n \geq 0$, et pour tout objet compact $C$ de $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$, le cône du morphisme canonique $C \longrightarrow C^{\mathbf{A}^n_S}$ est dans $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. Étant donné que $\Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S\,+})$ est compact, et que les objets compacts de $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ sont stables par produit tensoriel (smash produit), le foncteur $E \longmapsto E^{\mathbf{A}^1_S}$ commute aux sommes quelconques, d'où l'on déduit que la classe $\mathcal{A}'$ contient en fait tous les cônes de morphismes de la forme $E \longrightarrow E^{\mathbf{A}^1_S}$ pour tout $E$.

Soit $C$ un objet compact de $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$. Pour montrer que le foncteur correspondant $\mathbf{R}\mathit{Hom}(C,-)$ respecte les $\mathbf{A}^1$-équivalences, il suffit donc à présent de vérifier que ce foncteur envoie $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}'$. Soit $E$ un objet de $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$. On vérifie aussitôt que

$$\mathbf{R}\mathit{Hom}(C, E^{\mathbf{A}^1_S}) \simeq \mathbf{R}\mathit{Hom}(C,E)^{\mathbf{A}^1_S}\,,$$

d'où on déduit la première assertion du lemme.

Considérons à présent deux objets $C$ et $E$ de $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$, avec $C$ compact. Les $\mathbf{A}^1$-équivalences étant stables par produit tensoriel, le spectre

$$\mathbf{R}\mathit{Hom}(C, R_{\mathbf{A}^1}(E))$$

est invariant par homotopie, ce qui implique que le morphisme canonique

$$\mathbf{R}\mathit{Hom}(C,E) \longrightarrow \mathbf{R}\mathit{Hom}(C, R_{\mathbf{A}^1}(E))$$

induit un morphisme non moins canonique

$$R_{\mathbf{A}^1}(\mathbf{R}\mathit{Hom}(C,E)) \longrightarrow \mathbf{R}\mathit{Hom}(C, R_{\mathbf{A}^1}(E))\,.$$

Le fait que ce dernier soit un isomorphisme résulte du fait que le morphisme canonique $\mathbf{R}Hom(C,E) \longrightarrow \mathbf{R}Hom(C,R_{\mathbf{A}^1}(E))$ est une $\mathbf{A}^1$-équivalence, ce qui se voit de la manière suivante : l'objet $C$ étant compact dans une catégorie homotopique stable, le foncteur $\mathbf{R}Hom(C,-)$ commute aux colimites homotopiques, et donc ce morphisme est une colimite homotopique de morphismes de la forme

$$\mathbf{R}Hom(C,E) \longrightarrow \mathbf{R}Hom(C,E^{\mathbf{A}^n_S}) = \mathbf{R}Hom(C,E)^{\mathbf{A}^n_S}\,,$$

lesquels sont tous des $\mathbf{A}^1$-équivalences. □

## 2. Représentabilité de la $K$-théorie invariante par homotopie

*2.1.* — On note $K$ l'objet de $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ représentant la $K$-théorie au sens de Thomason et Trobaugh [**19**, Définition 3.1] (laquelle, d'après [**19**, Proposition 3.10], coïncide avec celle de Quillen pour les schémas admettant une famille ample de fibrés en droites, en particulier, pour les schémas affines). On a donc, pour tout $S$-schéma lisse $X$, un isomorphisme canonique de groupes abéliens

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))}(\Sigma^n\Sigma^\infty(X_+),K(X)) \simeq K_n(X)$$

(avec $K_n(X)=0$ si $n<0$). Le spectre de $K$-théorie est un spectre en anneaux (un monoïde commutatif dans $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$) via le produit tensoriel (dérivé) des complexes parfaits.

On définit la *$K$-théorie invariante par homotopie naïve* $I\!K$ par la formule

$$I\!K = R_{\mathbf{A}^1}(K)\,.$$

La structure de spectre en anneaux sur $K$ induit canoniquement une telle structure sur $I\!K$, de telle façon que le morphisme canonique $K \longrightarrow I\!K$ soit un morphisme de spectres en anneaux.

On choisit une présentation du groupe multiplicatif

$$\mathbf{G}_m = S \times \mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}[t,t^{-1}]\,,$$

et on note $b \in K_1(\mathbf{G}_m)$ la classe associée à la section inversible $t$, laquelle correspond à un morphisme

$$b : T = S^1 \wedge \mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{R}\Omega^\infty(K)$$

dans $\mathrm{Ho}(\mathcal{E}_\bullet(S))$.

On dispose alors du cup produit par la classe $b$ en $K$-théorie et en $K$-théorie invariante par homotopie naïve.

$$b\cup : T \wedge^{\mathbf{L}} K \xrightarrow{b\wedge^{\mathbf{L}} 1_K} K \wedge^{\mathbf{L}} K \xrightarrow{\mu} K$$

$$b\cup : T \wedge^{\mathbf{L}} I\!K \xrightarrow{b\wedge^{\mathbf{L}} 1_{I\!K}} I\!K \wedge^{\mathbf{L}} I\!K \xrightarrow{\mu} I\!K$$

*2.2.* — Comme on le voit, on aura donc à considérer des couples $(E,w)$, où $E$ est un préfaisceau de $S^1$-spectres, et où $w : T\wedge^{\mathbf{L}} E \longrightarrow E$ est un morphisme de $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$. On peut toujours supposer que $E$ est à la fois fibrant et cofibrant. Cela implique alors que les propriétés suivantes sont vérifiées (on rappelle qu'on a rendu $T$ cofibrant dans la catégorie $\mathcal{E}_\bullet(S)$ des préfaisceaux simpliciaux pointés) :

(a) le morphisme canonique $T \wedge^{\mathbf{L}} E \longrightarrow T \wedge E$ est un isomorphisme dans $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ (puisque $E$ est cofibrant) ;
(b) le morphisme $w$ se relève en un morphisme $\underline{w} : T \wedge E \longrightarrow E$ (car $T \wedge E$ est cofibrant et $E$ est fibrant).

Dans la pratique, on notera par abus $\underline{w} = w$, ce qui est justifé par la proposition 2.3 et la remarque 2.4 ci-dessous.

Si $E$ et $E'$ sont deux préfaisceaux de $S^1$-spectres chacun munis de morphismes $w : T \wedge E \longrightarrow E$ et $w' : T \wedge E' \longrightarrow E'$, un morphisme de préfaisceaux de $S^1$-spectres $f : E \longrightarrow E'$ sera dit $T$-*équivariant* si le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} T \wedge E \arrow[r, "w"] \arrow[d, "T\wedge f"'] & E \arrow[d, "f"] \\ T \wedge E' \arrow[r, "w'"] & E' \end{tikzcd}$$

***Proposition 2.3***. — *Soit $E$ un préfaisceau de $S^1$-spectres à la fois fibrant et cofibrant, et soient $w_i : T \wedge E \longrightarrow E$, $i = 0, 1$, deux morphismes de préfaisceaux de $S^1$-spectres tels que $w_0 = w_1$ dans $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$. Alors il existe un préfaisceau de $S^1$-spectres cofibrant $E'$, un morphisme de préfaisceaux $w' : T \wedge E' \longrightarrow E'$, et deux équivalences faibles $T$-équivariantes $f_i : E \longrightarrow E'$, pour $E$ muni de $w_i$, $i = 0, 1$.*

*Démonstration*. — Notons $\Delta^1$ l'intervalle simplicial (vu comme un préfaisceau constant), et posons $I = \Sigma^\infty(\Delta^1_+)$. La diagonale de $\Delta^1$ et le morphisme $\Delta^1 \longrightarrow \Delta^0$ induisent une structure d'algèbre de Hopf sur $I$ ; on notera ici $\Delta : I \longrightarrow I \wedge I$ la comultiplication, et $\eta : I \longrightarrow \Sigma^\infty(S_+)$ la co-unité. Les inclusions $\{i\} \subset \Delta^1$, $i = 0, 1$, induisent des cofibrations triviales $d_i : \Sigma^\infty(S_+) \longrightarrow I$, $i = 0, 1$, de sorte que $\eta d_i = 1_I$. En particulier, comme $E$ est cofibrant, $T \wedge E \wedge I$ est un objet cylindre de $T \wedge E$ au sens des catégories de modèles. Comme $E$ est aussi fibrant, on en déduit qu'il existe un morphisme

$$h : T \wedge E \wedge I \longrightarrow E$$

tel que $h(1_E \wedge d_i) = w_i$ pour $i = 0, 1$. On pose $E' = E \wedge I$, et on définit $w'$ comme le composé

$$T \wedge E \wedge I \xrightarrow{T\wedge 1_E \wedge \Delta} T \wedge E \wedge I \wedge I \xrightarrow{h \wedge 1_I} E \wedge I \,.$$

On définit enfin $f_i = 1_E \wedge d_i : E \longrightarrow E \wedge I$ pour $i = 0, 1$, et on vérifie aussitôt que cela donne la construction voulue. □

***Remarque 2.4***. — Pour tout morphisme de préfaisceaux de $S^1$-spectres $w : T \wedge E \longrightarrow E$ et pour toute cofibration triviale de but fibrant $i : E \longrightarrow E'$, comme $T \wedge i : T \wedge E \longrightarrow T \wedge E'$ est toujours une cofibration triviale, on peut toujours trouver $w' : T \wedge E' \longrightarrow E'$ de sorte que $i$ soit un morphisme $T$-équivariant. En particulier, dans la conclusion de la proposition 2.3, on peut toujours imposer que $E'$ soit aussi fibrant.

Une variation de l'argument précédent s'applique à la catégorie de modèles obtenue comme la localisation de Bousfield à gauche $L_{\mathbf{A}^1} Sp_{S^1}(S)$ de $Sp_{S^1}(S)$ par les morphismes de la forme

$$\Sigma^n\Sigma^\infty(\mathbf{A}^1 \times X_+) \longrightarrow \Sigma^n\Sigma^\infty(X_+)$$

pour $X$ lisse sur $S$ et $n$ un entier (les équivalences faibles correspondantes sont alors les morphismes induisant un isomorphisme dans $\mathrm{Ho}_{\mathbf{A}^1}(Sp_{S^1}(S))$). On en déduit que, pour tout préfaisceau de $S^1$-spectres $E$ muni d'un morphisme $w : T \wedge E \longrightarrow E$, le morphisme canonique $E \longrightarrow R_{\mathbf{A}^1}(E)$ peut être réalisé comme une cofibration triviale de but fibrant dans $L_{\mathbf{A}^1}Sp_{S^1}(S)$, de sorte qu'il existe un morphisme $w_{\mathbf{A}^1} : T \wedge R_{\mathbf{A}^1}(E) \longrightarrow R_{\mathbf{A}^1}(E)$ faisant de $E \longrightarrow R_{\mathbf{A}^1}(E)$ un morphisme $T$-équivariant.

De même, pour toute fibration triviale $p : E' \longrightarrow E$ de source cofibrante, comme $T \wedge E'$ est encore cofibrant, on voit qu'il existe un morphisme $w' : T \wedge E' \longrightarrow E'$ tel que le morphisme $p$ soit $T$-équivariant.

***2.5.*** — Considérons à présent un objet $E$ dans $Sp_{S^1}(S)$, muni d'un morphisme $w : T \wedge E \longrightarrow E$. On notera par abus encore $w : T \wedge^{\mathbf{L}} E \longrightarrow E$ le morphisme induit par le morphisme canonique $T \wedge^{\mathbf{L}} E \longrightarrow T \wedge E$. À une telle donnée, nous allons associer deux nouveaux spectres, notés respectivement $E^B$ et $E^\sharp$, et nous verrons ensuite qu'ils sont $\mathbf{A}^1$-équivalents ; voir le corollaire 2.11. Ces constructions ont lieu dans la catégorie de modèles des préfaisceaux de $S^1$-spectres (en particulier, on utilisera un certain nombre de fois des remplacements fibrants et des remplacements cofibrants). On n'exprimera cependant ces constructions que dans le language des foncteurs dérivés laissant au lecteur le soin de vérifier qu'une utilisation répétée de la remarque 2.4 donne bien un sens aux objets considérés.

On commence par la construction de Bass-Thomason-Trobaugh $E^B$. Nous allons construire par récurrence une famille de morphismes

$$E = F_0 \longrightarrow F_{-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_k \longrightarrow F_{k-1} \longrightarrow \cdots .$$

Pour un objet $C$ de $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$, on note $V(C)$ l'objet défini par le carré homotopiquement cocartésien suivant.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{R}\mathit{Hom}(\Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S+}), C) \arrow[d] \\ \mathbf{R}\mathit{Hom}(\Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S+}), C) \arrow[r] & V(C) \end{tikzcd}$$

Par fonctorialité, le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G}_m \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{A}^1_S \arrow[d] \\ \mathbf{A}^1_S \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

(où l'une des inclusions $\mathbf{G}_m \subset \mathbf{A}^1$ correspond à la présentation $\mathbf{A}^1 = \operatorname{Spec}(\mathbf{Z}[t])$, et l'autre à la présentation $\mathbf{A}^1 = \operatorname{Spec}(\mathbf{Z}[t^{-1}])$) induit un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{R}\mathit{Hom}(\Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S\,+}), C) \arrow[d] \\ \mathbf{R}\mathit{Hom}(\Sigma^\infty(\mathbf{A}^1_{S\,+}), C) \arrow[r] & \mathbf{R}\mathit{Hom}(\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m+}), C) \end{tikzcd}$$

et par là, un morphisme canonique

$$V(C) \longrightarrow \mathbf{R}\mathit{Hom}(\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m+}), C)\,.$$

On note $U(C)$ la fibre homotopique de ce dernier, ce qui donne, par définition, un triangle distingué canonique

$$U(C) \longrightarrow V(C) \longrightarrow \mathbf{R}\mathit{Hom}(\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m+}), C) \longrightarrow \Sigma U(C)\,.$$

Si en outre on dispose d'un morphisme $w : T \wedge^{\mathbf{L}} C \longrightarrow C$, alors, pour tout objet $A$ de $\operatorname{Ho}(\mathit{Sp}_{S^1}(S))$, on a un morphisme canonique

$$T \wedge^{\mathbf{L}} \mathbf{R}\mathit{Hom}(A, C) \longrightarrow \mathbf{R}\mathit{Hom}(A, C)$$

correspondant par adjonction à l'image par le foncteur $\mathbf{R}\mathit{Hom}(A, -)$ du morphisme $C \longrightarrow \mathbf{R}\mathit{Hom}(T, C)$ induit par $w$.

$$\mathbf{R}\mathit{Hom}(A, C) \longrightarrow \mathbf{R}\mathit{Hom}(A, \mathbf{R}\mathit{Hom}(T, C)) \simeq \mathbf{R}\mathit{Hom}(T \wedge^{\mathbf{L}} A, C)$$

Cette construction étant fonctorielle en $A$ (et le smash produit par $T$ commutant aux colimites homotopiques), on en déduit alors des morphismes naturels

$$T \wedge^{\mathbf{L}} V(C) \longrightarrow V(C) \quad \text{et} \quad T \wedge^{\mathbf{L}} U(C) \longrightarrow U(C)\,.$$

Le morphisme $w$ permet en outre de produire un morphisme canonique

$$C \longrightarrow U(C)$$

obtenu comme le morphisme composé

$$C \longrightarrow \mathbf{R}\mathit{Hom}(T, C) \subset \Sigma^{-1}(\mathbf{R}\mathit{Hom}(\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m+}), C)) \longrightarrow \Sigma^{-1}\Sigma U(C) = U(C)$$

(où $C \longrightarrow \mathbf{R}\mathit{Hom}(T, C)$ est obtenu par transposition de $w$, et où l'inclusion désigne le morphisme induit par la décomposition de $\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m+})$ en facteurs directs $\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m+}) = \Sigma^\infty(S_+) \vee \Sigma^{-1}(T)$, obtenue via la section unité de $\mathbf{G}_m$). Nous pouvons alors définir $F_k$ par la formule

$$F_{k-1} = U(F_k)\,.$$

On définit enfin la construction de Bass-Thomason-Trobaugh $E^B$ par la formule

$$E^B = \mathbf{L}\varinjlim_{n \geq 0} F_{-n}\,.$$

On a alors, par construction, un morphisme canonique

$$E \longrightarrow E^B\,.$$

La construction de $E^\sharp$ est plus directe. Le foncteur $T \wedge (-)$ induit des morphismes canoniques

$$\mathbf{R}\mathit{Hom}(T^{\wedge n}, E) \longrightarrow \mathbf{R}\mathit{Hom}(T^{\wedge n+1}, T \wedge^{\mathbf{L}} E)\,,$$

et le morphisme $w$ induit des morphismes évidents

$$w_* : \mathbf{R}\mathit{Hom}(T^{\wedge n+1}, T \wedge^{\mathbf{L}} E) \longrightarrow \mathbf{R}\mathit{Hom}(T^{\wedge n+1}, E)\,.$$

On obtient donc une suite de morphismes

$$E \longrightarrow \mathbf{R}\mathit{Hom}(T, E) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{R}\mathit{Hom}(T^{\wedge n}, E) \longrightarrow \mathbf{R}\mathit{Hom}(T^{\wedge n+1}, E) \longrightarrow \cdots$$

On pose enfin

$$E^\sharp = \mathbf{L}\varinjlim_{n\geq 0} \mathbf{R}\mathit{Hom}(T^{\wedge n}, E)\,.$$

On dispose aussi, par construction, d'un morphisme canonique

$$E \longrightarrow E^\sharp\,.$$

***2.6***. — Si on considère le couple $(K, b)$ correspondant à la $K$-théorie (voir 2.1), la construction de Bass-Thomason-Trobaugh nous donne, de manière tautologique (en regard de la construction donnée dans [**19**, preuve du lemme 6.3]), le résultat de représentabilité suivant.

***Proposition 2.7***. — *Le spectre $K^B$ représente la $K$-théorie de Bass-Thomason-Trobaugh. Autrement dit, pour tout $S$-schéma lisse $X$, et pour tout entier $n$, on a un isomorphisme de groupes abéliens*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))}(\Sigma^n\Sigma^\infty(X_+), K^B) \simeq K^B_n(X)\,,$$

*où $K^B_n(X)$ désigne le $n$-ème groupe de $K$-théorie de Bass au sens de Thomason et Trobaugh* [**19**, Définition 6.4].

***2.8***. — Le spectre de *$K$-théorie invariante par homotopie* (au sens de Weibel [**24, 19**]) est, par définition :

$$KH = R_{\mathbf{A}^1}(K^B)\,.$$

On a donc, pour tout $S$-schéma lisse $X$, et tout entier $n$, un isomorphisme de groupes

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))}(\Sigma^n\Sigma^\infty(X_+), KH) \simeq KH_n(X)\,.$$

Afin de comprendre la $K$-théorie invariante par homotopie au sein de la théorie de l'homotopie des schémas, nous allons comparer le spectre $KH$ et le spectre $\mathbb{K}^\sharp$.

***Proposition 2.9***. — *Soient $E$ et $F$ deux objet de $Sp_{S^1}(S)$, munis de morphismes $w : T \wedge E \longrightarrow E$ et $w' : T \wedge F \longrightarrow F$. On suppose donné un morphisme $T$-équivariant $\varphi : E \longrightarrow F$. Si le morphisme $\varphi : E \longrightarrow F$ est une $\mathbf{A}^1$-équivalence, alors il en est de même des morphismes induits $\varphi^B : E^B \longrightarrow F^B$ et $\varphi^\sharp : E^\sharp \longrightarrow F^\sharp$.*

*Démonstration*. — Cela résulte immédiatement du lemme 1.4. □

***Proposition 2.10***. — *Sous les hypothèses de* 2.5, *si $E$ est invariant par homotopie, alors il en est de même de $E^B$ et de $E^\sharp$, et on a alors un isomorphisme canonique*

$$E^B \simeq E^\sharp\,.$$

*Démonstration.* — Les spectres invariants par homotopie forment une sous-catégorie localisante de $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$, et, si un spectre $F$ est invariant par homotopie, il en est de même de $\mathbf{R}\mathit{Hom}(C,F)$ pour tout objet $C$ de $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$. On en déduit aussitôt, par examen des constructions de $E^B$ et de $E^\sharp$, que ces derniers sont invariants par homotopie dès que c'est le cas pour $E$.

Si $C$ est invariant par homotopie, on voit immédiatement que l'objet $V(C)$ construit au numéro 2.5 est canoniquement isomorphe à $C$, de sorte que le triangle distingué

$$U(C) \longrightarrow V(C) \longrightarrow \mathbf{R}\mathit{Hom}(\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m+}),C) \longrightarrow \Sigma U(C)$$

s'identifie au triangle distingué

$$\mathbf{R}\mathit{Hom}(T,C) \longrightarrow C \longrightarrow \mathbf{R}\mathit{Hom}(\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m+}),C) \longrightarrow \Sigma\mathbf{R}\mathit{Hom}(T,C)$$

(correspondant à la décomposition $\Sigma^\infty(\mathbf{G}_{m+}) = \Sigma^\infty(S_+) \vee \Sigma^{-1}T$). Si, en outre, on a un morphisme $T \wedge^{\mathbf{L}} C \longrightarrow C$, sous ces identifications, le morphisme $C \longrightarrow U(C)$ n'est autre que le morphisme $C \longrightarrow \mathbf{R}\mathit{Hom}(T,C)$ induit par adjonction. En appliquant ce qui précède aux objets $C = \mathbf{R}\mathit{Hom}(T^{\wedge n},E)$, on en déduit que les spectres $E^B$ et $E^\sharp$ sont canoniquement isomorphes. □

***Corollaire 2.11.*** — *Sous les hypothèses de* 2.5*, on a des isomorphismes canoniques dans* $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ *:*

$$R_{\mathbf{A}^1}(E^B) \simeq R_{\mathbf{A}^1}(E)^B \simeq R_{\mathbf{A}^1}(E)^\sharp \simeq R_{\mathbf{A}^1}(E^\sharp)\,.$$

*Démonstration.* — En vertu de la propositions 2.9 et de la première assertion de la proposition 2.10, le morphisme $E^B \longrightarrow R_{\mathbf{A}^1}(E)^B$ (resp. $E^\sharp \longrightarrow R_{\mathbf{A}^1}(E)^\sharp$) est une $\mathbf{A}^1$-équivalence dont le but est invariant par homotopie, et donc son image par le foncteur $R_{\mathbf{A}^1}$ est un isomorphisme de même but (à isomorphisme canonique près). Ce corollaire résulte donc de l'identification de $R_{\mathbf{A}^1}(E)^B$ et de $R_{\mathbf{A}^1}(E)^\sharp$, donnée par la seconde assertion de la proposition 2.10. □

***Corollaire 2.12.*** — *Il existe des isomorphismes canoniques* $KH \simeq \mathbb{K}^B \simeq \mathbb{K}^\sharp$.

***2.13.*** — On rappelle qu'un préfaisceau de $S^1$-spectres $E$ sur la catégorie des $S$-schémas lisses a la *propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich* si $E(\varnothing) \simeq 0$, et si, pour tout carré cartésien de $S$-schémas lisses

$$\begin{tikzcd} U \times_X V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d, "f"] \\ U \arrow[r, "j"'] & X \end{tikzcd}$$

avec $j$ une immersion ouverte, et $f$ un morphisme étale, induisant un isomorphisme $f^{-1}(X-U)_{\text{réd}} \simeq (X-U)_{\text{réd}}$, le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} E(X) \arrow[r] \arrow[d] & E(V) \arrow[d] \\ E(U) \arrow[r] & E(U \times_X V) \end{tikzcd}$$

est homotopiquement cartésien (on rappelle que cette condition est équivalente à la propriété de descente cohomologique formulée en terme d'hyper-recouvrements de Nisnevich ; voir [**21, 22**]).

On vérifie facilement que si $E$ vérifie la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich, alors il en est de même de $\mathbf{R}\mathit{Hom}(C,E)$ pour tout préfaisceau de $S^1$-spectres $C$ (il suffit de le vérifier dans le cas où $C = \Sigma^\infty(X_+)$ pour $X$ lisse sur $S$). En outre, les préfaisceaux de $S^1$-spectres vérifiant la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich forment une sous-catégorie localisante de $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$. Cela implique que, si $E$ vérifie la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich, il en est de même de $R_{\mathbf{A}^1}(E)$, ainsi que, lorsque cela a un sens, de $E^B$ et de $E^\sharp$.

***Corollaire 2.14***. — *Le spectre $I\!K^\sharp$ vérifie la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich.*

*Démonstration*. — En vertu des théorèmes d'excision et de localisation [**19**, 7.1 et 7.4], on sait déjà que le spectre $K^B$ (et donc aussi, d'après ce qui précède, $KH$) vérifie la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich (on pourrait aussi invoquer directement [**19**, Théorème 10.8]). Le corollaire résulte donc de l'identification de $I\!K^\sharp$ avec $KH$. □

***2.15***. — Soit $Sp_T Sp_{S^1}(S)$ la catégorie des $T$-spectres dans la catégorie des préfaisceaux de $S^1$-spectres $Sp_{S^1}(S)$. Les objets de $Sp_T Sp_{S^1}(S)$ sont des collections $E = (E_n, \sigma_n)_{n\geq 0}$, où, pour $n \geq 0$, $E_n$ est un objet de $Sp_{S^1}(S)$, et $\sigma_n : T\wedge E_n \longrightarrow E_{n+1}$ est un morphisme de $S^1$-spectres. On définit, à partir de la structure de catégorie de modèles stable sur $Sp_{S^1}(S)$, une structure de catégorie de modèles $T$-stable sur $Sp_T Sp_{S^1}(S)$, de sorte la catégorie homotopique $\mathrm{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$ est canoniquement munie d'une structure de catégorie triangulée ; voir [**8, 2**]. On note

$$\Omega^\infty_T : Sp_T Sp_{S^1}(S) \longrightarrow Sp_{S^1}(S)$$

le foncteur d'évaluation en zéro $E \longmapsto E_0$. C'est un foncteur de Quillen à droite, et donc, sont adjoint à gauche,

$$\Sigma^\infty_T : Sp_{S^1}(S) \longrightarrow Sp_T Sp_{S^1}(S)$$

est un foncteur de Quillen à gauche. On a donc une adjonction dérivée :

$$\mathbf{L}\Sigma^\infty_T : \mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S)) \rightleftarrows \mathrm{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S)) : \mathbf{R}\Omega^\infty_T\ .$$

Par construction de $\mathrm{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$, le smash produit par $T$ est une équivalence de catégories, ce qui donne un sens à l'expression $T^{\wedge n} \wedge^{\mathbf{L}} E$ pour tout entier $n < 0$. Étant donnée une propriété $\mathcal{P}$ portant sur les objets de $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$, on dira qu'un objet $E$ de $\mathrm{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$ a la propriété $\mathcal{P}$ si, pour tout entier $n$, le préfaisceau en $S^1$-spectres $\mathbf{R}\Omega^\infty_T(T^{\wedge n} \wedge^{\mathbf{L}} E)$ a la propriété $\mathcal{P}$ dans $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$.

On désigne par $\mathcal{SH}(S)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$ formée des objets vérifiant la propriété d'invariance par homotopie ainsi que la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich. Le foncteur d'inclusion $\mathcal{SH}(S) \longrightarrow$

$\mathrm{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$ admet un adjoint à gauche que nous noterons

$$\gamma : \mathrm{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S)) \longrightarrow \mathcal{SH}(S)\,.$$

On vérifie aisément (par comparaison des propriétés universelles) que la catégorie $\mathcal{SH}(S)$ est canoniquement équivalente à la catégorie homotopique stable des schémas construite en termes de $T$-spectres ou encore de $\mathbf{P}^1$-spectres dans la littérature [**9, 14, 2**].

***2.16***. — Soit $E$ un préfaisceau de $S^1$-spectres sur la catégorie des $S$-schémas lisses, muni d'un morphisme $w : T \wedge E \longrightarrow E$. On lui associe un $T$-spectre

$$\underline{E} = (E_n, \sigma_n)_{n\geq 0}$$

en posant $E_n = E$ et $\sigma_n = w$ pour tout $n \geq 0$. Le morphisme $w$ induit un morphisme

$$\underline{w} : T \wedge^{\mathbf{L}} \underline{E} \longrightarrow \underline{E}$$

dans $\mathrm{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$, lequel s'avère être un isomorphisme. En outre, on a alors un isomorphisme canonique

$$E^\sharp \simeq \mathbf{R}\Omega^\infty_T(\underline{E})$$

dans la catégorie $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ (cela résulte par exemple de [**8**, Propositions 4.6 et 4.7], ou bien encore de [**2**, Théorème 4.3.61]). Il en découle que, étant donnée une propriété raisonnable $\mathcal{P}$ des objets de $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$ (par exemple, la propriété de descente pour une topologie $t$, ou bien la propriété d'invariance par homotopie), pour que $\underline{E}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ en tant qu'objet de $\mathrm{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$, il faut et il suffit que $E^\sharp$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ en tant qu'objet de $\mathrm{Ho}(Sp_{S^1}(S))$.

En considérant le spectre de $K$-théorie (resp. le spectre de $K$-théorie invariante par homotopie naïve) muni du cup produit par la classe $b$ (cf. 2.1), on obtient donc un objet $\underline{K}$ (resp. $\underline{I\!\!K}$) dans $\mathrm{Ho}(Sp_T Sp_{S^1}(S))$. On a ainsi des isomorphismes :

$$K^\sharp \simeq \mathbf{R}\Omega^\infty_T(\underline{K}) \quad \text{et} \quad KH \simeq I\!\!K^\sharp \simeq \mathbf{R}\Omega^\infty_T(\underline{I\!\!K})\,.$$

On remarque que, en vertu des corollaires 2.11 et 2.14, le $T$-spectre $\underline{I\!\!K}$ vérifie les propriétés de descente relativement à la topologie de Nisnevich et d'invariance par homotopie, et qu'il représente la $K$-théorie invariante par homotopie dans $\mathcal{SH}(S)$.

On définit par ailleurs le $T$-spectre de $K$-théorie $KGL$ par la formule

$$KGL = \gamma(\underline{K})\,.$$

***Remarque 2.17***. — Lorsqu'on applique le foncteur d'espace de lacets infini au préfaisceau de $K$-théorie, on obtient un préfaisceau de complexes de Kan pointé $\mathbf{R}\Omega^\infty(K)$ sur la catégorie des $S$-schémas lisses, lequel est le foncteur de $K$-théorie à valeurs dans les espaces pointés (par opposition aux $S^1$-spectres). Le préfaisceau $\mathbf{R}\Omega^\infty(K)$ associe à un un $S$-schéma $X$ le complexe de Kan pointé $\mathbf{R}\Omega(wS\,\mathit{Perf}(X))$, correspondant à l'espace des lacets de la construction de Waldhausen appliquée à la catégorie des complexes parfaits sur $X$. Il résulte du théorème de Gillet-Waldhausen [**19**, Théorème 1.11.7] que, pour tout $S$-schéma lisse de type fini $X$, le morphisme canonique de $iS\,\mathit{Vect}(X)$ (la construction de Waldhausen appliquée à la catégorie exacte des fibrés vectoriels sur $X$) vers $wS\,\mathit{Perf}(X)$ est une équivalence faible simpliciale localement pour la topologie de Zariski (et donc de Nisnevich) : pour avoir une équivalence faible globalement, il suffit que $X$ admette une famille ample de fibrés en droites, puisqu'alors les complexes parfaits sur $X$ s'identifient aux complexes bornés de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang fini ; cf. [**19**, Corollaire 3.9]. D'autre part, le morphisme canonique de $B(\amalg_{n\geq 0} BGL_n)$ vers le préfaisceau simplicial *iS Vect* (correspondant à l'inclusion de la catégorie des fibrés vectoriels triviaux dans *Vect*) est lui aussi une équivalence faible simpliciale localement pour la topologie de Zariski. Enfin, en vertu de [**12**, Proposition 3.10, page 139], on a une $\mathbf{A}^1$-équivalence de $\mathbf{Z} \times BGL_\infty$ vers $\mathbf{R}\Omega(B(\amalg_{n\geq 0} BGL_n))$. Autrement dit, on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{Z} \times BGL_\infty \simeq \mathbf{R}\Omega^\infty(K)$$

dans la catégorie homotopique (instable) de Morel et Voevodsky.

Ce qui est désigné habituellement comme le $\mathbf{P}^1$-spectre de $K$-théorie en théorie de l'homotopie des schémas [**15, 16, 13, 17**] admet la description suivante (1). La classe de Bott $\beta = [\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}] - [\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)]$ dans le groupe $K_0(\mathbf{P}^1) = \pi_0(\mathbf{R}\Omega^\infty(K)(\mathbf{P}^1))$ définit un morphisme $\beta : \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{R}\Omega^\infty(K)$ dans $\mathrm{Ho}(\mathcal{E}_\bullet(S))$, et induit donc un morphisme

$$\beta : \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{R}\Omega^\infty(K) \simeq \mathbf{Z} \times BGL_\infty$$

dans la catégorie homotopique instable pointée $\mathcal{H}_\bullet(S)$. Le $\mathbf{P}^1$-spectre de $K$-théorie usuel, que nous noterons ici $\mathcal{K}$, est le $\mathbf{P}^1$-spectre périodique déterminé par le cup produit par la classe $\beta$, c'est-à-dire le $\mathbf{P}^1$-spectre déterminé par la collection de préfaisceaux simpliciaux

$$(\mathbf{Z} \times BGL_\infty, \mathbf{Z} \times BGL_\infty, \ldots, \mathbf{Z} \times BGL_\infty, \ldots)$$

avec $\beta\cup : \mathbf{P}^1 \wedge (\mathbf{Z} \times BGL_\infty) \longrightarrow \mathbf{Z} \times BGL_\infty$ pour morphismes structuraux (où on a pris implicitement un remplacement fibrant de $\mathbf{Z} \times BGL_\infty$ et un remplacement cofibrant de $\mathbf{P}^1$ dans $\mathcal{E}_\bullet(S)$).

Lorsqu'on travaille localement pour la topologie de Nisnevich (en fait, Zariski suffit) et modulo $\mathbf{A}^1$-équivalence, on a l'identification $S^1 \wedge \mathbf{G}_m \simeq \mathbf{P}^1$ (où $\mathbf{P}^1$ est considéré comme un espace pointé). Cela permet de décrire la catégorie $\mathcal{SH}(S)$ en termes de $\mathbf{P}^1$-spectres ; cf. [**2**, Théorème 4.3.40]. C'est ce qui donne un sens à l'énoncé suivant.

***Proposition 2.18***. — *L'équivalence de catégories entre la catégorie homotopique stable des $T$-spectres et la catégorie homotopique stable des $\mathbf{P}^1$-spectres envoie $KGL$ sur $\mathcal{K}$.*

*Démonstration*. — La catégorie homotopique stable des $\mathbf{P}^1$-spectres de préfaisceaux simpliciaux est canoniquement équivalente à celle des $\mathbf{P}^1$-spectres de $S^1$-spectres. Comme $\mathbf{Z} \times BGL_\infty$ et $\mathbf{R}\Omega^\infty(K)$ sont $\mathbf{A}^1$-équivalents, cette équivalence de catégories identifie le $\mathbf{P}^1$-spectre $\mathcal{K}$ introduit au numéro 2.17 avec le $\mathbf{P}^1$-spectre donné par la collection de $S^1$-spectres $(K, K, \ldots, K, \ldots)$ munie des morphismes structuraux $\beta\cup : \mathbf{P}^1 \wedge K \longrightarrow K$ correspondant au cup produit par la classe $\beta = [\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}] - [\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)]$. Il

1. Nous insistons sur le fait que ce $\mathbf{P}^1$-spectre de $K$-théorie n'est pas défini en tant qu'il représente quoi que ce soit dans la catégorie homotopique stable des schémas : il faut plutôt le voir comme un analogue purement formel du spectre de $K$-théorie topologique en théorie de l'homotopie des schémas. On verra plus loin que ce spectre représente en fait la $K$-théorie invariante par homotopie ; cf. proposition 2.18 et théorème 2.20.

suffit donc de voir que l'identification $\mathbf{P}^1 \simeq S^1 \wedge \mathbf{G}_m$ identifie (au signe près) la classe $\beta$ ci-dessus avec la classe $b$ introduite au numéro 2.1. En outre, il suffit de traiter le cas où $S = \operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ (par fonctorialité de la $K$-théorie, puisque les deux classes $b$ et $\beta$ sont bien définie sur $\mathbf{Z}$). Or, dans ce cas, la classe $b$ correspond au choix d'un générateur de la partie libre du groupe abélien

$$K_1(\mathbf{Z}[t, t^{-1}]) \simeq K_1(\mathbf{Z}) \oplus K_0(\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\,,$$

et la classe $\beta$ induit un isomorphisme canonique

$$K_0(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Z}}) \simeq K_0(\mathbf{Z}) \oplus \beta K_0(\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\,.$$

En outre, il est bien connu que le Bockstein $\partial$ dans la suite exacte fondamentale

$$0 \longrightarrow K_1(\mathbf{Z}) \longrightarrow K_1(\mathbf{Z}[t]) \oplus K_1(\mathbf{Z}[t^{-1}]) \longrightarrow K_1(\mathbf{Z}[t, t^{-1}]) \xrightarrow{\partial} K_0(\mathbf{Z}) \longrightarrow 0$$

admet une section induite par la classe $b$. Comme la suite exacte de Mayer-Vietoris

$$K_1(\mathbf{Z}[t]) \oplus K_1(\mathbf{Z}[t^{-1}]) \longrightarrow K_1(\mathbf{Z}[t, t^{-1}]) \longrightarrow K_0(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Z}})$$

identifie l'image de $K_1(\mathbf{Z}[t, t^{-1}])$ avec $\beta K_0(\mathbf{Z})$, on en déduit aussitôt la proposition. $\square$

***Proposition 2.19***. — *Les $T$-spectres $KGL$ et $\underline{I\!\!K}$ sont canoniquement isomorphes dans $\mathcal{SH}(S)$.*

*Démonstration.* — Comme $\underline{I\!\!K}$ vérifie les propriétés de descente relativement à la topologie de Nisnevich et d'invariance par homotopie, on a un isomorphisme canonique $\gamma(\underline{I\!\!K}) \simeq \underline{I\!\!K}$. Le morphisme $\underline{K} \longrightarrow \underline{I\!\!K}$ étant une $\mathbf{A}^1$-équivalence terme à terme, il induit, d'après [**2**, Lemme 4.3.59], un isomorphisme après application du foncteur de localisation $KGL = \gamma(\underline{K}) \simeq \gamma(\underline{I\!\!K}) \simeq \underline{I\!\!K}$, ce qui implique l'assertion. $\square$

***Théorème 2.20* (Voevodsky)**. — *Le $T$-spectre $KGL$ représente la $K$-théorie invariante par homotopie dans $\mathcal{SH}(S)$ : pour tout $S$-schéma lisse $X$, et tout entier $n$, on a un isomorphisme de groupes*

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\Sigma^n \Sigma^\infty_T(X_+), KGL) \simeq KH_n(X)\,.$$

*Démonstration.* — Cela découle aussitôt de la proposition précédente et du numéro 2.16. $\square$

***Remarque 2.21***. — Ce théorème de représentabilité permet de décrire la $K$-théorie invariante par homotopie comme la théorie cohomologique orientée universelle avec loi de groupe formelle multiplicative ; voir [**17, 13**]. Il permet aussi de décrire la $K$-théorie invariante par homotopie comme la théorie cohomologique représentée par le $T$-spectre de Snaith $\Sigma^\infty_T(\mathbf{P}^\infty_+)[\beta^{-1}]$ dans $\mathcal{SH}$ ; voir [**17, 6**].

***Remarque 2.22***. — Bien que le théorème 2.20 montre que le $T$-spectre de $K$-théorie $KGL$ représente la $K$-théorie invariante par homotopie dans $\mathcal{SH}(S)$, lorsque $S$ n'est pas régulier, nous ne savons rien de ce que l'objet $\mathbf{Z} \times BGL_\infty$ représente dans la catégorie homotopique instable $\mathcal{H}(S)$ (on s'attend cependant à ce que cela ait un rapport avec la $K$-théorie de Karoubi-Villamayor).

***Corollaire 2.23.*** — *Si $q \geq 1$ est nilpotent dans $\mathcal{O}_S$, alors, pour tout $S$-schéma lisse $X$, et pour tout entier $n$, on a un isomorphisme de groupes*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\Sigma^n \Sigma^\infty_T(X_+), KGL) \otimes \mathbf{Z}[1/q] \simeq K^B_n(X) \otimes \mathbf{Z}[1/q]\,.$$

*Démonstration.* — Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème précédent et de [**19**, Théorème 9.6]. □

## 3. Descente par éclatements abstraits

***3.1.*** — En vertu de [**2**, Section 4.5], les catégories homotopiques stables $\mathcal{SH}(S)$ forment un 2-foncteur homotopique stable $\mathcal{SH}$ au sens de [**1**, Définition 1.4.1] (et même un dérivateur algébrique homotopique stable au sens de [**1**, Définition 2.4.13]). Étant donné un morphisme de schémas $f : S' \longrightarrow S$, on a donc un couple de foncteur adjoints

$$\mathbf{L}f^* : \mathcal{SH}(S) \rightleftarrows \mathcal{SH}(S') : \mathbf{R}f_*$$

(avec $\mathbf{L}f^*$ adjoint à gauche de $\mathbf{R}f_*$). Le foncteur $\mathbf{L}f^*$ est essentiellement déterminé par le fait qu'il commute aux colimites homotopiques et qu'il correspond au foncteur de changement de base par $f$ : pour tout $S$-schéma lisse $X$, en posant $X' = S' \times_S X$, on a :

$$\mathbf{L}f^* \Sigma^\infty_T(X_+) = \Sigma^\infty_T(X'_+)\,.$$

Lorsque $f$ est en outre lisse, le foncteur $\mathbf{L}f^*$ a aussi un adjoint à gauche

$$\mathbf{L}f_\sharp : \mathcal{SH}(S') \longrightarrow \mathcal{SH}(S)$$

essentiellement déterminé par le fait que, pour tout $S'$-schéma lisse $X$, on a

$$\mathbf{L}f_\sharp \Sigma^\infty_T(X_+) = \Sigma^\infty_T(X_+)\,.$$

Nous utiliserons de manière essentielle les faits suivants.

***Théorème 3.2*** **(Localisation).** — *Soit $i : Z \longrightarrow S$ une immersion fermée, d'immersion ouverte complémentaire $j : U \longrightarrow S$. Pour tout objet $E$ de $\mathcal{SH}(S)$, le carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}j_\sharp \mathbf{L}j^*(E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{R}i_* \mathbf{L}i^*(E) \end{array}$$

*est homotopiquement cocartésien. Autrement dit, on a alors un triangle distingué canonique*

$$\mathbf{L}j_\sharp \mathbf{L}j^*(E) \longrightarrow E \longrightarrow \mathbf{R}i_* \mathbf{L}i^*(E) \longrightarrow \Sigma\, \mathbf{L}j_\sharp \mathbf{L}j^*(E)\,.$$

*En outre, les foncteurs*

$$\mathbf{L}j_\sharp : \mathcal{SH}(U) \longrightarrow \mathcal{SH}(S) \quad \textit{et} \quad \mathbf{R}i_* : \mathcal{SH}(Z) \longrightarrow \mathcal{SH}(S)$$

*sont pleinement fidèles.*
*En particulier, le foncteur*

$$(\mathbf{L}j^*, \mathbf{L}i^*) : \mathcal{SH}(S) \longrightarrow \mathcal{SH}(U) \times \mathcal{SH}(Z)$$

*est conservatif.*

*Démonstration.* — Voir [**2**, Section 4.5.3]. □

***Corollaire 3.3.*** — *Pour tout schéma $X$, l'immersion $i : X_{\mathrm{red}} \longrightarrow X$ induit une équivalence de catégories*

$$\mathbf{L}i^* : \mathcal{SH}(X) \longrightarrow \mathcal{SH}(X_{\mathrm{red}})\,.$$

*Démonstration.* — Cela résulte immédiatement du théorème précédent, puisque l'ouvert complémentaire de l'immersion fermée $i$ est vide (sachant que $\mathcal{SH}(\varnothing) \simeq 0$). □

***Théorème 3.4* (Changement de base lisse).** — *Pour tout carré cartésien dans la catégorie des schémas,*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y' \arrow[r, "v"'] & Y \end{tikzcd}$$

*si le morphisme $v$ est lisse, alors, pour tout objet $E$ de $\mathcal{SH}(Y')$, le morphisme canonique*

$$\mathbf{L}u_\sharp\, \mathbf{L}q^*(E) \longrightarrow \mathbf{L}p^*\, \mathbf{L}v_\sharp(E)$$

*est un isomorphisme dans $\mathcal{SH}(X)$.*
*Par transposition, pour tout objet $E$ de $\mathcal{SH}(X)$, le morphisme canonique*

$$\mathbf{L}v^*\, \mathbf{R}p_*(E) \longrightarrow \mathbf{R}q_*\, \mathbf{L}u^*(E)$$

*est un isomorphisme dans $\mathcal{SH}(Y')$.*

*Démonstration.* — Voir [**2**, Proposition 4.5.48]. □

***Théorème 3.5* (Changement de base propre).** — *Pour tout carré cartésien de schémas,*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y' \arrow[r, "v"'] & Y \end{tikzcd}$$

*si le morphisme $p$ est propre, alors, pour tout objet $E$ de $\mathcal{SH}(X)$, le morphisme canonique*

$$\mathbf{L}v^*\, \mathbf{R}p_*(E) \longrightarrow \mathbf{R}q_*\, \mathbf{L}u^*(E)$$

*est un isomorphisme dans $\mathcal{SH}(Y')$.*

*Démonstration.* — Voir [**1**, Corollaire 1.7.18] pour le cas où $p$ est projectif. Le cas général en découle grâce au lemme de Chow ; voir [**3**, Proposition 2.3.11]. □

*3.6*. — On rappelle qu'un morphisme de schémas $p : X' \longrightarrow X$ est un *éclatement abstrait* de centre $Z$ si $p$ est propre, et si $Z$ est un sous-schéma fermé tel que le morphisme induit

$$p^{-1}(X - Z)_{\text{réd}} \longrightarrow (X - Z)_{\text{réd}}$$

soit un isomorphisme. La topologie cdh est la topologie de Grothendieck sur la catégorie des schémas engendrée par les recouvrements de Nisnevich et par les recouvrements de la forme $Z \amalg X' \longrightarrow X$ pour tout éclatement abstrait $X' \longrightarrow X$ de centre $Z$. Nous renvoyons le lecteur à [**18**, Lemme 5.8 et Proposition 5.9] (dont les énoncés et les preuves sont tout-à-fait valables en inégales caractéristiques) pour une description civilisée des recouvrement cdh (à raffinement près).

Un préfaisceau de $S^1$-spectres $E$ sur la catégorie des schémas vérifie la propriété de descente relativement à la topologie cdh si et seulement s'il vérifie la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich (2.13) et si, pour tout éclatement abstrait $p : X' \longrightarrow X$ de centre $Z$, en posant $Z' = p^{-1}(Z)$, le carré commutatif évident

$$\begin{tikzcd} E(X) \arrow[r] \arrow[d] & E(X') \arrow[d] \\ E(Z) \arrow[r] & E(Z') \end{tikzcd}$$

est homotopiquement (co)cartésien ; voir [**21, 22**].

***Proposition 3.7***. — *Soit $p : X' \longrightarrow X$ un éclatement abstrait de centre $Z$. On considère le carré cartésien de schémas correspondant ci-dessous.*

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "k"] \arrow[d, "q"'] & X' \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

*On note enfin $r = pk = iq : Z' \longrightarrow X$. Alors, pour tout objet $E$ de $\mathcal{SH}(X)$, le carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{R}p_* \, \mathbf{L}p^* E \arrow[d] \\ \mathbf{R}i_* \, \mathbf{L}i^* E \arrow[r] & \mathbf{R}r_* \, \mathbf{L}r^* E \end{tikzcd}$$

*est homotopiquement cocartésien.*

*Démonstration*. — Soit $j : U = X - Z \longrightarrow X$ l'immersion ouverte complémentaire de $i$. Par le théorème de localisation et par le théorème de changement de base lisse, l'image du carré considéré par le foncteur $\mathbf{L}j^*$ est le carré

$$\begin{tikzcd} \mathbf{L}j^* E \arrow[r, "="] \arrow[d] & \mathbf{L}j^* E \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} ,$$

et, de même, en vertu des théorèmes de localisation et de changement de base propre, son image par le foncteur $\mathbf{L}i^*$ est le carré

$$\begin{tikzcd} \mathbf{L}i^*E \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \mathbf{R}q_* \, \mathbf{L}q^* \, \mathbf{L}i^*E \arrow[d, "="] \\ \mathbf{L}i^*E \arrow[r] & \mathbf{R}q_* \, \mathbf{L}q^* \, \mathbf{L}i^*E \end{tikzcd} .$$

Les deux carrés ci-dessus étant trivialement homotopiquement cocartésiens, et les foncteurs $\mathbf{L}i^*$ et $\mathbf{L}j^*$ formant une famille conservative de foncteurs exacts (3.2), cela prouve la proposition. □

***Proposition 3.8***. — *Pour tout morphisme de schémas $f : S' \longrightarrow S$, le morphisme canonique*

$$\mathbf{L}f^*(KGL) \longrightarrow KGL$$

*est un isomorphisme dans $\mathcal{SH}(S')$.*

*Démonstration*. — On a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{L}f^*(\mathbf{Z} \times BGL_\infty) \simeq \mathbf{Z} \times BGL_\infty$$

dans la catégorie homotopique instable $\mathcal{H}(S')$ (car $\mathbf{Z} \times BGL_\infty$ est une colimite homotopique de schémas lisses de la forme $GL_{n_1} \times \cdots \times GL_{n_r}$). La proposition résulte donc aussitôt de la description de $KGL$ comme le $\mathbf{P}^1$-spectre périodique associé au morphisme de Bott $\mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{Z} \times BGL_\infty$ ; voir la remarque 2.17 et la proposition 2.18. □

***Théorème 3.9***. — *La $K$-théorie invariante par homotopie vérifie la propriété de descente relativement à la topologie cdh.*

*Démonstration*. — On sait que $KH$ vérifie la propriété de descente relativement à la topologie de Nisnevich. Pour vérifier la descente cdh, il suffit donc de montrer la propriété de Mayer-Vietoris relativement aux éclatements abstraits ; or, en vertu de la proposition précédente et du théorème 2.20, cela résulte de l'évaluation en $X$ du carré homotopiquement (co)cartésien de la proposition 3.7 appliquée à $E = KGL$. □

***Corollaire 3.10***. — *Pour tout entier $q > 0$, la $K$-théorie de Bass-Thomason Trobaugh à coefficients dans $\mathbf{Z}[1/q]$ (resp. dans $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$) vérifie la propriété de descente relativement à la topologie cdh pour les $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$-schémas (resp. les $\mathbf{Z}[1/q]$-schémas).*

*Démonstration*. — Cela résulte du théorème 3.9 et de [**19**, Théorème 9.6]. □

En guise d'application, on en déduit la forme faible suivante de la conjecture de Weibel en caractéristique positive, sous l'hypothèse de l'existence locale de résolutions des singularités (on rappelle que cela n'est connu qu'en caractéristique nulle).

***Théorème 3.11***. — *Soit $k$ un corps. On suppose que $k$ admet une résolution locale des singularités dans le sens où, pour tout $k$-schéma de type fini $X$, il existe un recouvrement cdh $X' \longrightarrow X$ avec $X'$ régulier. Alors, pour tout $k$-schéma $S$ de dimension de Krull $\leq d$, et pour tout $S$-schéma lisse $X$, on a*

$$KH_i(X) = 0 \quad \textit{pour tout } i < -d.$$

*Si, sous les mêmes hypothèses, le corps $k$ est de caractéristique $p > 0$, on a donc :*

$$K_i^B(X) \otimes \mathbf{Z}[1/p] = 0 \quad \textit{pour tout } i < -d.$$

*Démonstration.* — Notons $E$ le préfaisceau de $S^1$-spectres sur la catégorie des $S$-schémas de type fini défini par

$$U \longmapsto KH(U \times_S X)\,.$$

On déduit du théorème 3.9 que, pour tout $k$-schéma de type fini $U$, on a, pour tout entier $n$, un isomorphisme canonique

$$H^n_{\mathrm{cdh}}(U, E) = KH_{-n}(U \times_S X)\,,$$

où $H^*_{\mathrm{cdh}}(U, E)$ désigne l'hyper-cohomologie cdh de $U$ à coefficients dans le faisceau cdh de $S^1$-spectres associé à $E$. On dispose donc de la suite spectrale ci-dessous

$$E_2^{p,q} = H^p_{\mathrm{cdh}}(S, H^q(E)) \Rightarrow KH_{-p-q}(X)\,,$$

où $H^q(E)$ désigne le préfaisceau de groupes abéliens $U \longmapsto KH_{-q}(U \times_S X)$, et où $H^*_{\mathrm{cdh}}(S, F)$ désigne la cohomologie de $S$ à coefficients dans le faisceau cdh associé à $F$. La dimension cohomologique cdh étant majorée par la dimension de Krull (voir l'appendice de [**18**]), on a $E_2^{p,q} = 0$ dès que $p > d$, et la suite spectrale ci-dessus converge fortement. Or, pour $q > 0$, le faisceau cdh associé à $H^q(E)$ est isomorphe à zéro : comme on a supposé que $k$ admet une résolution des singularités locale, il suffit de vérifier que $KH_{-q}(Y) = 0$ pour $Y$ régulier, ce qui est bien connu. Cela implique que $E_2^{p,q} = 0$ dès que $p + q > d$, et achève donc la démonstration de la première assertion.

Dans le cas très hypothétique où $k$ est un corps de caractéristique $p > 0$ qui admet une résolution des singularité locale au sens ci-dessus, on obtient la seconde assertion à partir de la première grâce à [**19**, Théorème 9.6]. □

## Références


[1] J. Ayoub, *Six opérations de Grothendieck et cycles évanescents dans le monde motivique I*, Astérisque **314** (2007).

[2] ———, *Six opérations de Grothendieck et cycles évanescents dans le monde motivique II*, Astérisque **315** (2007).

[3] D.-C. Cisinski and F. Déglise, *Triangulated categories of mixed motives*, 2009.

[4] G. Cortiñas, C. Haesemeyer, M. Schlichting, and C. Weibel, *Cyclic homology, cdh-cohomology and negative K-theory*, Ann. of Math. (2) **167** (2008), no. 2, 549–573.

[5] T. Geisser and L. Hesselholt, *On the vanishing of negative K-groups*, Math. Ann. **348** (2010), no. 3, 707–736.

[6] D. Gepner and V. Snaith, *On the motivic spectra representing algebraic cobordism and algebraic K-theory*, Doc. Math. **14** (2009), 359–396.

[7] C. Haesemeyer, *Descent properties of homotopy K-theory*, Duke Math. J. **125** (2004), no. 3, 589–620.

[8] M. Hovey, *Spectra and symmetric spectra in general model categories*, J. Pure Appl. Algebra **165** (2001), no. 1, 63–127.

[9] J. F. Jardine, *Motivic symmetric spectra*, Doc. Math. **5** (2000), 445–552.

[10] S. Kelly, *Vanishing of negative $K$-theory in positive characteristic*, 2011.

[11] A. Krishna, *On the negative $K$-theory of schemes in finite characteristic*, J. Algebra **322** (2009), no. 6, 2118–2130.

[12] F. Morel and V. Voevodsky, $\mathbb{A}^1$*-homotopy theory of schemes*, Publ. math. de l'I.H.E.S. **90** (1999), 45–143.

[13] I. Panin, K. Pimenov, and O. Röndigs, *On Voevodsky's algebraic $K$-theory spectrum*, Algebraic topology, Abel Symp., vol. 4, Springer, Berlin, 2009, pp. 279–330.

[14] J. Riou, *Catégorie homotopique stable d'un site suspendu avec intervalle*, Bull. Soc. Math. France **135** (2007), no. 4, 495–547.

[15] ———, *Opérations sur la $K$-théorie algébrique et régulateurs via la théorie homotopique des schémas*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **344** (2007), no. 1, 27–32.

[16] ———, *Algebraic $K$-theory,* $\mathbf{A}^1$*-homotopy and Riemann-Roch theorems*, J. Topol. **3** (2010), no. 2, 229–264.

[17] M. Spitzweck and P. A Østvær, *The Bott inverted infinite projective space is homotopy algebraic $K$-theory*, Bull. Lond. Math. Soc. **41** (2009), no. 2, 281–292.

[18] A. Suslin and V. Voevodsky, *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*, The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998), NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, pp. 117–189.

[19] R. W. Thomason and T. Trobaugh, *Higher algebraic $K$-theory of schemes and of derived categories*, The Grothendieck Festschrift, Vol. III, Progr. Math., vol. 88, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 247–435.

[20] V. Voevodsky, $\mathbf{A}^1$*-homotopy theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998), no. Extra Vol. I, 1998, pp. 579–604.

[21] ———, *Homotopy theory of simplicial sheaves in completely decomposable topologies*, J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), no. 8, 1384–1398.

[22] ———, *Unstable motivic homotopy categories in Nisnevich and cdh-topologies*, J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), no. 8, 1399–1406.

[23] C. Weibel, *$K$-theory and analytic isomorphisms*, Invent. Math. **61** (1980), no. 2, 177–197.

[24] ———, *Homotopy algebraic $K$-theory*, Algebraic $K$-theory and algebraic number theory (Honolulu, HI, 1987), Contemp. Math., vol. 83, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, pp. 461–488.

D.-C. Cisinski, Université Paul Sabatier, Institut de Mathématiques de Toulouse, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 9, France
*E-mail :* `denis-charles.cisinski@math.univ-toulouse.fr`
*Url :* `http://www.math.univ-toulouse.fr/~dcisinsk/`